**סיכום מאמר אקדמי**

**Envy-free Matchings in Bipartite Graphs and their Applications to**

**Fair Division**

***Elad Aigner-Horev and Erel Segal-Halevi***

מגישים: בנימין סאלדמן ודניאל גילקרוב

**מבוא**

שידוך בגרף דו-צדדי עם חלוקה X ו-Y של הקודקודים נטולת קנאה אם אין ללא השידוך קודקוד ב-X שהוא סמוך לקודקוד ב-Y. כל שידוך מושלם הוא גם נטול קנאה אבל שידוכים כאלה קיימים גם כאשר אין שידוך מושלם.

להבדיל ממאמרים אחרים שאינם באים לפתור את בעיית מציאת השידוך נטול הקנאה בגרפים דו צדדיים, המאמר מראה שבכל גרף דו-צדדי קיימת חלוקה ייחודית כך שכל השידוכים נטולי הקנאות נמצאים בקרב הקבוצות של החלוקה ובעזרת ההוכחה הזאת הוא מציע אלגוריתם פולינומיאלי בזמן למציאת שידוך נטול קנאה בגרף דו-צדדי ממושקל ולא ממושקל.

במאמר עונה על השאלה הזו על ידי הוכחה של משפט מבנה עבור גרפים דו צדדיים. הוא מוכיח שבכל גרף דו צדדי קיימת חלוקה ייחודית של הקודקודים ל-2 קבוצות: "טובים" ו-"רעים" כאשר הקבוצה של ה-"טובים" היא X רוויה ולכן מכילה את השידוך נטול הקנאות הגדול ביותר האפשרי, בזמן שהקבוצה של ה-"רעים" בעלי מבנה שזהה למסלול אי-זוגי ולכן מכילה שידוך נטול קנאות ריק בלבד.

עיקר השימוש של שידוך נטול קנאה הוא באלגוריתמים לחלוקה הוגנת של "עוגה" נטולת קנאה ומידול של הבעיה לבעיות שונות, למשל:

בהינתן שוק שיש בו כמה קונים וכמה סחורות, ולכל טוב יכול להיות מחיר. בהינתן וקטור מחיר, לכל קונה יש ערכת ביקוש - סט של חבילות שממקסמות את התועלת של הקונה על כל החבילות התאמה נטולת קנאה במחיר (בהינתן וקטור מחיר) היא התאמה שבה כל סוכן מקבל חבילה מקבוצת הביקוש שלו. המשמעות היא שאף סוכן לא יעדיף לקבל חבילה נוספת עם אותם מחירים. דוגמה להגדרה זו היא בעיית ההרמוניה בשכירות - התאמת דיירים (הסוכנים) לחדרים (הפריטים) תוך קביעת מחיר לכל חדר.

המאמר מראה כיצד ניתן להשתמש בשידוך נטול קנאה בבעיות שונות של חלוקה הוגנת עם משאבים, "עוגות" או אובייקטים בדידים ובפרט, המאמר מציע אלגוריתמים לחלוקה: אלגוריתם סימטרי לחיתוך "עוגה" פרופורציונלי, אלגוריתם עבור 1-out-of(2n-2) הקצאה מקסימלית של טובין בדידים ואלגוריתם עבור 1-out-of[2n/3] הקצאה מקסימלית של רעים (bads) בדידים בקרב n סוכנים.

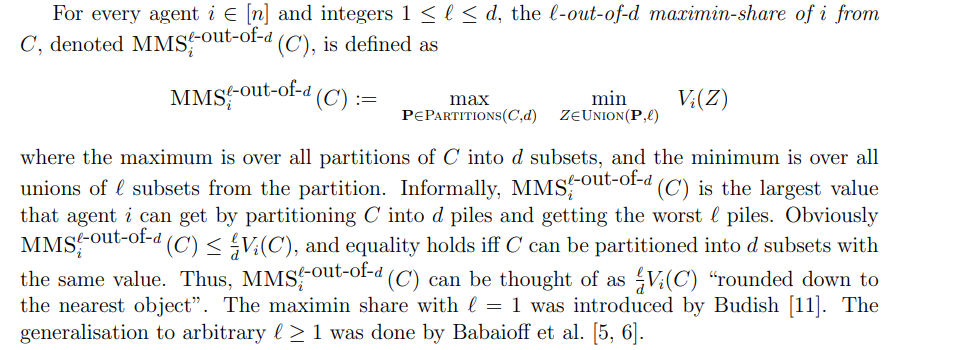
**הגדרות**

1. **שידוך בגרף:** יהי גרף דו-צדדי . *שידוך היא תת קבוצה של הצלעות כך שאין שתי צלעות המחוברות לקודקוד משותף.*
2. **שידוך מושלם:** יהי גרף דו-צדדי . *שידוך ייקרא מושלם אם M מכסה את כל הקודקודים של G.*
3. ***שידוך נטול קנאות:***יהי גרף דו-צדדי . *שידוך נקרא שידוך נטול קנאות אם אין קודקוד בקבוצה צמוד לקודקוד בקבוצה כאשר הקבוצות ו- הם קבוצות הקודקודים ששודכו ע"י M ושייכות ל-X ו-Y בהתאמה.*
4. **מסלול Y רווי:** גרף דו-צדדי *נקרא* Y -path-saturated (מסלול Y רווי) אם עבור איזשהו קיימת חלוקה  *ו- כך שלכל מתקיים:*
5. *יש שידוך מושלם בין ל-.*
6. *כל קודקוד ב- צמוד לקודקוד ב-.*
7. **רצפים מתחלפים (רצף M מתחלף):** יהי *M* שידוך בגרף דו-צדדי . יהי תת הקבוצה שמכילה קודקודים שלא שודכו ב-*M*. *M-alternating sequence* (או רצף M מתחלף) ב- הוא רצף של זוגות של תתי קבוצות זרות של קודקודים כאשר לכל :
8. .
9. .
10. **גרף X רווי:** יהי גרף דו-צדדי .הגרף ייקרא X רווי (X-saturated graph) אם קיים שידוך M בגרף G המכסה את כל קודקודי הקבוצה X.
11. **בעיית חלוקה הוגנת גנרית:** נחשוב על הבעיה הבאה – קיימת קבוצה C של שמייצגת משאבים שצריכים להתחלק בין n סוכנים. לכל סוכן יש מדד (פונקציה בין קבוצות)

כאשר i זה מספר הסוכן (בין 1 ל-n) ולכל סוכן יש סף . חלוקה t-הוגנת של C זו חלוקה של C ל-n תתי קבוצות כך שלכל i (סוכן) מתקיים: . הקיום של חלוקה t-הוגנת תלוי בערכי הסף ובטבעו של המשאב C.

1. **סף סביר:** בהינתן משאב C, מדד ערכי על C ומספר שלם , מספר ממשי נקרא סף סביר עבור אם:
2. קיימת חלוקה של C כך ש:ומתקיים: .
3. לכל ולכל k תתי קבוצות לא משותפים אם מתקיים: אז קיימת חלוקה של ל- כך ש: .
4. **חיתוך עוגה פרופורציונלי:** בעיית חיתוך עוגה פרופורציונלית היא מקרה מיוחד של בעיית החלוקה ההוגנת הגנרית, שבו המשאב C הוא רציף והוא בדרך כלל נקרא "עוגה" ומיוצג על ידי האינטרוול הממשי [0,1], המדדים האם לא אטומיים ולכל סוכן i ערך הסף הוא

והוא גם סף סביר.

1. **הקצאה הוגנת של אובייקטים בדידים:** בעיית הקצאת אובייקט הוגנת היא מקרה מיוחד של בעיית החלוקה ההוגנת הגנרית שבה המשאב C הוא קבוצה סופית שהאיברים שלו נקראים אובייקטים או פריטים ומדדי המחיר הם כל פונקציה בין קבוצות: . אובייקטים עם ערך חיובי לכל הסוכנים נקראים טובין (goods) ואובייקטים עם ערכים שליליים נקראים רעים (bads).
2. **הנתח המקסימלי ((The maximin share:**

**האלגוריתמים**

***אלגוריתם 1: מציאת חלוקת EFM של גרף דו-צדדי***

***קלט:*** *גרף דו-צדדי .*

***פלט:*** *חלוקת EFM ייחודית ל-G של הקודקודים ו- .*

1. *מצא שידוך מקסימלי M ב-G.*
2. *יהי תת קבוצה של קודקודים שלא שודכו על ידי M.*
3. *חשב את .*
4. *החזר: ו- ו- ו-.*

**אלגוריתם 2: מציאת שידוך נטול קנאות מקסימלי בגרף ללא פונקציית משקלים**

**קלט:** *גרף דו-צדדי .*

**פלט:** שידוך envy-free מקסימלי בגרף דו-צדדי ללא פונקציית משקלים *G*.

1. מצא שידוך מקסימלי *M* ב-*G*.
2. מצא את חלוקת ה-EFM  *ו-* באמצעות אלגוריתם 1.
3. החזר את תת-השידוך *.*

**אלגוריתם 3: מציאת שידוך נטול קנאות מקסימלי בגרף עם פונקציית משקלים על הצלעות *w***

**קלט:** *גרף דו-צדדי עם פונקציית משקלים על הצלעות w.*

***פלט:*** שידוך envy-free מקסימלי בעל העלות הנמוכה ביותר.

1. מצא את חלוקת ה-EFM  *ו-* באמצעות אלגוריתם 1.
2. מצא והחזר את השידוך המקסימלי בעלות העלות המינימלית ב- *.*

**אלגוריתם 4: The Lone Divider algorithm**

**קלט:**

1. קבוצת מקורות C שצריך לחלק.
2. קבוצה של סוכנים עם מדדים על C.
3. ערכי סף המקיימים את תנאי הסף הסביר (הגדרה מספר 8).

**פלט:** חלוקה של C ל-כך שמתקיים .

1. בחר באופן שרירותי סוכן מהקבוצה X. חלק את הקבוצה C ל-|X| תתי קבוצות זרים המקיימים .
2. הגדר גרף דו-צדדי G עם הסוכנים של X בצד אחד והקבוצה בצד השני. הוסף קשת כשמתקיים .
3. השתמש באלגוריתם 2 ומצא שידוך נטול קנאות מקסימלי M ב-G. הבא לכל אלמנט משודך ב- את הסוכן שמשודך לו ב-.
4. הגדר להיות הקבוצה של הסוכנים שלא שודכו ו- המשאבים שלא שודכו. אם חזור על צעד מספר 1.

**אלגוריתם 5: אלגוריתם סימטרי לחיתוך עוגה פרופורציונלי**

**קלט:** עוגה  *וקבוצה של סוכנים בעלי מדדים לא אטומיים על C. המדדים מנורמלים כך שמתקיים: .*

***פלט:*** *חלוקה כך שמתקיים .*

1. *שאל כל סוכן לייצר וקטור של סימנים של n-1 סימנים כך שמתקיים:*

*ומחלק את C ל-n תתי-אינטרוולים עם ערך של בדיוק 1 עבור i.*

1. *בחר מווקטורי הסימנים את האחד עם הערך המילוני הנמוך ביותר. חלק את C לפי הסימנים האלה. הגדר את חלקי החלוקה על ידי .*
2. *הגדר גרף דו-צדדי G עם הסוכנים של X בצד אחד והחלקים מהסעיף הקודם (מסומנים באמצעות Y) בצד השני. הוסף קשת כשמתקיים* .
3. הקצה לכל סוכן משקל זוהי פונקציה של קבוצת השכנים כך ששני סוכנים בעלי משקל זהה אם ורק אם .
4. הקצה לכל חלק משקל ייחודי כך שהמשקל של החלק השמאלי ביותר (המשויך ל-0) הוא 0 והמשקל של החלק השמאלי ביותר הבא הוא 1 וכו'.
5. הקצה לכל קשת את המחיר . בעזרת אלגוריתם 3, מצא שידוך נטול קנאות מקסימלי וזול ביותר ב-*G*.
6. הגדר להיות הקבוצה של כל הסוכנים המשויכים לכל החלקים ב-*Y.* תן לכל סוכן בקבוצה חלק שרירותי מ-.
7. הגדר . חלק את הסוכנים ב- לתתי קבוצות לפי המשקל שלהם. כלומר, עבור כלשהו, מצא חלוקה כך ש- שייכים לאותו אם ורק אם .
8. עבור כל , חלק בצורה רקורסיבית את האיחוד של החלקים ב- בקרב הסוכנים של .
9. חלק בצורה רקורסיבית את האיחוד של החלקים ב- בקרב הסוכנים של על ידי חזרה לצעד מספר 1.

**הוכחת נכונות האלגוריתמים**

ניתן להוכיח את הנכונות של אלגוריתמים 1-3 על ידי הוכחת הטענות הבאות:

***טענה 1:*** יהי *M* שידוך מקסימלי בגרף דו-צדדי  *ו- תת קבוצה של קודקודים שלא שודכו על ידי M. וחלוקות ו- המושרות על ידי ומתקיים:*

1. *אין צלעות בין ל-.*
2. *תת הגרף הוא* Y -path-saturated*.*
3. *תת הגרף הוא* X-saturated.
4. *כל ב- הוא envy-free ב-G.*
5. *כל שידוך envy-free ב-G מוכל ב- .*

*(סעיפים 4,5 תקפים לכל חלוקה של X ו-Y שמקיימים את סעיפים 1,2,3,4,5)*

***הוכחת טענה 1:******הוכחת סעיף (1)-*** *לפי הבניה של הגרף, הקבוצה זו קבוצת כל השכנים של ב-G.* ***הוכחת סעיף (2)-*** *נוכיח תחילה ש- תת הקבוצה של M המוכלת ב- מרווה את . אכן, עבור כלשהו, קודקוד כלשהו לא משודך על ידי M ולכן מסלול M מתחלף ניתן לאיתור בקרב הקשתות ששימשו את הבניה של כלומר: כאשר שני קודקודי הקצה לא משודכים. על ידי היפוך המסלול ניתן להגדיל את השידוך M ב-1, אבל זה סותר את המקסימליות של M. לכן, כל הקודקוד של משודכים על ידי M. לפי הבניה, קבוצת השידוכים שלהם ב-M היא . זה מרמז על זה שבניית מסתיימת בצד של X , כלומר היא מסתיימת ב- עבור כלשהו. כעת, החלוקות*

*ו- מקיימות את ההגדרה של מסלול Y רווי.*

***הוכחת סעיף (3)-*** *נוכיח ש- תת הקבוצה של M המוכלת ב- מרווה את .*

*אכן, לפי הנחת הטענה כל הקודקודים של X שלא משודכים על ידי M מוכלים ב- כך שכל הקודקודים של משודכים על ידי M. לפי הבנייה, הם חייבים להיות משודכים לקודקודים שלא בתוך כל , לכן כל השידוכים נמצאים כולם ב-.*

***הוכחת סעיף (4)-*** *יהי W שידוך מרווה ב-. מאחר ו-W מרווה את , אין קודקוד "קנאי" ב-. לפי (1), אין קשתות בין ו-. מאחר ורק הקודקודים של רווים על ידי W, אף קודקוד של מקנא. לכן, אין ב-X קודקוד שמקנא ולכן W הוא שידוך חסר קנאות ב-G.*

***הוכחת סעיף (5)-*** *יהי W שידוך נטול קנאות כלשהו ב-G. נגדיר: תת הקבוצה של שמרווה על ידי W ו- תת הקבוצה של שמרווה על ידי W. אנחנו צריכים להוכיח ש- ו- ריקים.*

*לפי (1), קודקוד של יכול להיות משודך רק לקודקוד של , לכן מספיק להוכיח ש- ריקה.*

*נגדיר: ונניח בשלילה ש-. לפי (2) הגרף הוא מסלול Y-רווי. נסמן את החלוקות על ידי: ו- . נגדיר להיות האינדקס הקטן ביותר כך שקודקוד של משודך על ידי W ומתקיים:. לפי הגדרה 4, כל הקודקודים של משודכים באופן מושלם לקודקודים של . נסמן את השידוך שלהם על ידי.*

*נשים לב שמתקיים . כל קודקוד סמוך לקודקוד של שמרווה על ידי W.*

*כדי להבטיח ש-x לא מקנא, x חייב להיות מרווה על ידי W.*

*נגדיר את להיות קודקוד ב-. לפי הגדרה 4, הוא סמוך לקודקוד כלשהו .*

*כדי להבטיח ש- לא מקנא, הוא גם חייב להיות רווי על ידי W. אבל מאחר ומתקיים: . לכן, חייבים להיות לפחות קודקודים של שרויים על יד W: קודקודים של ועוד הקודקוד שלא נמצא ב-. אבל זו סתירה שכן הקודקודים של יכולים להיות משודכים רק לקודקודים של ורק קודקודים של משודכים על ידי W.*

***טענה 2:*** *בכל גרף דו-צדדי קיימת חלוקה ייחודית ו-*

*שמקיימת את שלושת התנאים הבאים:*

1. *אין צלעות בין ל-.*
2. *תת הגרף הוא* Y -path-saturated*.*
3. *תת הגרף הוא* X-saturated.

*בנוסף, החלוקה הזאת מניבה את התוצאות הבאות:*

1. *כל ב- הוא envy-free ב-G.*
2. *כל שידוך envy-free ב-G מוכל ב- .*

***הוכחת טענה 2:*** *נגדיר גרף דו-צדדי , M שידוך מקסימלי שרירותי ב-G ו- וחלוקות ו- המושרות על ידי הסדרה מתחלפת המקסימלית.*

*טענה 1 מראה שהחלוקות האלה מספקות את סעיפים 1,2,3,4,5. נותר להוכיח שהחלוקות הללו הן ייחודיות, כלומר הן לא תלויות בשידוך המקסימלי M.*

*נשקול חלוקות חלופיות ו- המספקות את סעיפים 1,2,3.*

*הפעלת סעיף 4 של טענה 1 על החלוקות , מרמזת שיש שידוך נטול קנאות ב-G שמרווה את . הפעלת סעיף 5 של טענה 1 על החלוקות , מרמזת על שהשידוך הזה חייב להיות מוכל ב-, בפרט . טיעונים אנלוגיים מרמזים ש-.*

*לכן, . ולכן גם . מאחר ו- ו- מתקיים ולכן גם .*

***הוכחת נכונות אלגוריתם מספר 1:***

*לפי הגדרת החלוקות ו- בעזרת חישוב ה-M סדרה מתחלפת המקסימלית בהוכחת טענה 2, נובע שהחלוקה המושרת על ידי חישוב ה- M סדרה מתחלפת המקסימלית באלגוריתם (1) מספקת את סעיפים 1,2,3,4,5 של טענה 2 ולכן החלוקות:*

*ו- מהוות חלוקות ייחודיות המקיימות את התנאים של טענה 2.*

***הוכחת נכונות אלגוריתם מספר 2:***

*לפי סעיף 1 של טענה 2 השידוך המקסימלי בגרף (כאשר נובעים מאלגוריתם 1) מרווה את ולפי סעיף 4 של טענה 2 השידוך הזה נטול קנאות. לפי סעיף 5 של טענה 2 אין עוד שידוך נטול קנאות שיכול להרוות כל קודקוד של . ולכן השידוך המוחזר הוא בהכרח שידוך נטול קנאות מקסימלי.*

***הוכחת נכונות אלגוריתם מהספר 3:***

*בדיוק כמו באלגוריתם 2, מתחילים בלמצוא את החלוקה הייחודית של G על ידי שימוש באלגוריתם 1. ההבדל הוא בצעד האחרון של האלגוריתם: במקום להחזיר את , שזה שידוך רווי, מחזירים שידוך רווי בעל העלות הנמוכה ביותר. מציאת שידוך מקסימלי בעל העלות הנמוכה יותר ידוע בתור בעיית ההשמה. בגלל שייתכן והגדלים של יהיו שונים זו בעיית השמה לא מאוזנת. קיימים אלגוריתמים שמציעים פתרון לבעיה הזאת ומבוססים על השיטה ההונגרית. נוכיח כעת כי האלגוריתם נכון: לפי טענה 2 כל השידוכים חסרי הקנאות ב-G נמצאים בתת-הגרף וכל השידוכים המקסימליים ב- מרווים את ולכן הם נטולי קנאה. לכן, הפעלת השיטה ההונגרית על- מניבה שידוך חסר קנאות מקסימלי בעל העלות הנמוכה ביותר ב-G.*