**סיכום מאמר אקדמי**

**Envy-free Matchings in Bipartite Graphs and their Applications to**

**Fair Division**

***Elad Aigner-Horev and Erel Segal-Halevi***

מגישים: בנימין סאלדמן ודניאל גילקרוב

**מבוא**

שידוך בגרף דו-צדדי עם חלוקה X ו-Y של הקודקודים נטולת קנאה אם אין ללא השידוך קודקוד ב-X שהוא סמוך לקודקוד ב-Y. כל שידוך מושלם הוא גם נטול קנאה אבל שידוכים כאלה קיימים גם כאשר אין שידוך מושלם.

להבדיל ממאמרים אחרים שאינם באים לפתור את בעיית מציאת השידוך נטול הקנאה בגרפים דו צדדיים, המאמר מראה שבכל גרף דו-צדדי קיימת חלוקה ייחודית כך שכל השידוכים נטולי הקנאות נמצאים בקרב הקבוצות של החלוקה ובעזרת ההוכחה הזאת הוא מציע אלגוריתם פולינומיאלי בזמן למציאת שידוך נטול קנאה בגרף דו-צדדי ממושקל ולא ממושקל.

עיקר השימוש של שידוך נטול קנאה הוא באלגוריתמים לחלוקה הוגנת של "עוגה" נטולת קנאה ומידול של הבעיה לבעיות שונות, למשל:

בהינתן שוק שיש בו כמה קונים וכמה סחורות, ולכל טוב יכול להיות מחיר. בהינתן וקטור מחיר, לכל קונה יש ערכת ביקוש - סט של חבילות שממקסמות את התועלת של הקונה על כל החבילות התאמה נטולת קנאה במחיר (בהינתן וקטור מחיר) היא התאמה שבה כל סוכן מקבל חבילה מקבוצת הביקוש שלו. המשמעות היא שאף סוכן לא יעדיף לקבל חבילה נוספת עם אותם מחירים. דוגמה להגדרה זו היא בעיית ההרמוניה בשכירות - התאמת דיירים (הסוכנים) לחדרים (הפריטים) תוך קביעת מחיר לכל חדר.

המאמר הזה מראה כיצד ניתן להשתמש בשידוך נטול קנאה בבעיות שונות של חלוקה הוגנת עם משאבים, "עוגות" או אובייקטים בדידים ובפרט, המאמר מציע אלגוריתמים לחלוקה: אלגוריתם סימטרי לחיתוך "עוגה" פרופורציונלי, אלגוריתם עבור 1-out-of(2n-2) הקצאה מקסימלית של טובין בדידים ואלגוריתם עבור 1-out-of[2n/3] הקצאה מקסימלית של רעים (bads) בדידים בקרב n סוכנים.

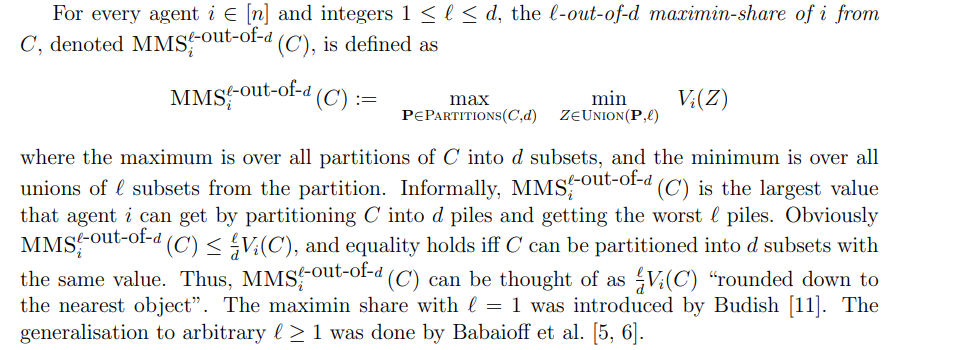
**הגדרות**

1. **שידוך בגרף:** יהי גרף דו-צדדי . *שידוך היא תת קבוצה של הצלעות כך שאין שתי צלעות המחוברות לקודקוד משותף.*
2. **שידוך מושלם:** יהי גרף דו-צדדי . *שידוך ייקרא מושלם אם M מכסה את כל הקודקודים של G.*
3. ***שידוך נטול קנאות:***יהי גרף דו-צדדי . *שידוך נקרא שידוך נטול קנאות אם אין קודקוד בקבוצה צמוד לקודקוד בקבוצה כאשר הקבוצות ו- הם קבוצות הקודקודים ששודכו ע"י M ושייכות ל-X ו-Y בהתאמה.*
4. **מסלול Y רווי:** גרף דו-צדדי *נקרא* Y -path-saturated (מסלול Y רווי) אם עבור איזשהו קיימת חלוקה  *ו- כך שלכל מתקיים:*
5. *יש שידוך מושלם בין ל-.*
6. *כל קודקוד ב- צמוד לקודקוד ב-.*
7. **רצפים מתחלפים (רצף M מתחלף):** יהי *M* שידוך בגרף דו-צדדי . יהי תת הקבוצה שמכילה קודקודים שלא שודכו ב-*M*. *M-alternating sequence* (או רצף M מתחלף) ב- הוא רצף של זוגות של תתי קבוצות זרות של קודקודים כאשר לכל :
8. .
9. .
10. **גרף X רווי:** יהי גרף דו-צדדי .הגרף ייקרא X רווי (X-saturated graph) אם קיים שידוך M בגרף G המכסה את כל קודקודי הקבוצה X.
11. **בעיית חלוקה הוגנת גנרית:** נחשוב על הבעיה הבאה – קיימת קבוצה C של שמייצגת משאבים שצריכים להתחלק בין n סוכנים. לכל סוכן יש מדד (פונקציה בין קבוצות)

כאשר i זה מספר הסוכן (בין 1 ל-n) ולכל סוכן יש סף . חלוקה t-הוגנת של C זו חלוקה של C ל-n תתי קבוצות כך שלכל i (סוכן) מתקיים: . הקיום של חלוקה t-הוגנת תלוי בערכי הסף ובטבעו של המשאב C.

1. **סף סביר:** בהינתן משאב C, מדד ערכי על C ומספר שלם , מספר ממשי נקרא סף סביר עבור אם:
2. קיימת חלוקה של C כך ש:ומתקיים: .
3. לכל ולכל k תתי קבוצות לא משותפים אם מתקיים: אז קיימת חלוקה של ל- כך ש: .
4. **חיתוך עוגה פרופורציונלי:** בעיית חיתוך עוגה פרופורציונלית היא מקרה מיוחד של בעיית החלוקה ההוגנת הגנרית, שבו המשאב C הוא רציף והוא בדרך כלל נקרא "עוגה" ומיוצג על ידי האינטרוול הממשי [0,1], המדדים האם לא אטומיים ולכל סוכן i ערך הסף הוא

והוא גם סף סביר.

1. **הקצאה הוגנת של אובייקטים בדידים:** בעיית הקצאת אובייקט הוגנת היא מקרה מיוחד של בעיית החלוקה ההוגנת הגנרית שבה המשאב C הוא קבוצה סופית שהאיברים שלו נקראים אובייקטים או פריטים ומדדי המחיר הם כל פונקציה בין קבוצות: . אובייקטים עם ערך חיובי לכל הסוכנים נקראים טובין (goods) ואובייקטים עם ערכים שליליים נקראים רעים (bads).
2. **הנתח המקסימלי ((The maximin share:**

**האלגוריתמים**

***אלגוריתם 1: מציאת חלוקת EFM של גרף דו-צדדי***

***קלט:*** *גרף דו-צדדי .*

***פלט:*** *חלוקת EFM ייחודית ל-G של הקודקודים ו- .*

1. *מצא שידוך מקסימלי M ב-G.*
2. *יהי תת קבוצה של קודקודים שלא שודכו על ידי M.*
3. *חשב את .*
4. *החזר: ו- ו- ו-.*

**אלגוריתם 2: מציאת שידוך נטול קנאות מקסימלי בגרף ללא פונקציית משקלים**

**קלט:** *גרף דו-צדדי .*

**פלט:** שידוך envy-free מקסימלי בגרף דו-צדדי ללא פונקציית משקלים *G*.

1. מצא שידוך מקסימלי *M* ב-*G*.
2. מצא את חלוקת ה-EFM  *ו-* באמצעות אלגוריתם 1.
3. החזר את תת-השידוך *.*

**אלגוריתם 3: מציאת שידוך נטול קנאות מקסימלי בגרף עם פונקציית משקלים על הצלעות *w***

**קלט:** *גרף דו-צדדי עם פונקציית משקלים על הצלעות w.*

***פלט:*** שידוך envy-free מקסימלי בעל העלות הנמוכה ביותר.

1. מצא את חלוקת ה-EFM  *ו-* באמצעות אלגוריתם 1.
2. מצא והחזר את השידוך המקסימלי בעלות העלות המינימלית ב- *.*

**אלגוריתם 4: The Lone Divider algorithm**

**קלט:**

1. קבוצת מקורות C שצריך לחלק.
2. קבוצה של סוכנים עם מדדים על C.
3. ערכי סף המקיימים את תנאי הסף הסביר (הגדרה מספר 8).

**פלט:** חלוקה של C ל-כך שמתקיים .

1. בחר באופן שרירותי סוכן מהקבוצה X. חלק את הקבוצה C ל-|X| תתי קבוצות זרים המקיימים .
2. הגדר גרף דו-צדדי G עם הסוכנים של X בצד אחד והקבוצה בצד השני. הוסף קשת כשמתקיים .
3. השתמש באלגוריתם 2 ומצא שידוך נטול קנאות מקסימלי M ב-G. הבא לכל אלמנט משודך ב- את הסוכן שמשודך לו ב-.
4. הגדר להיות הקבוצה של הסוכנים שלא שודכו ו- המשאבים שלא שודכו. אם חזור על צעד מספר 1.

**אלגוריתם 5: אלגוריתם סימטרי לחיתוך עוגה פרופורציונלי**

**קלט:** עוגה  *וקבוצה של סוכנים בעלי מדדים לא אטומיים על C. המדדים מנורמלים כך שמתקיים: .*

***פלט:*** *חלוקה כך שמתקיים .*

1. *שאל כל סוכן לייצר וקטור של סימנים של n-1 סימנים כך שמתקיים:*

*ומחלק את C ל-n תתי-אינטרוולים עם ערך של בדיוק 1 עבור i.*

1. *בחר מווקטורי הסימנים את האחד עם הערך המילוני הנמוך ביותר. חלק את C לפי הסימנים האלה. הגדר את חלקי החלוקה על ידי .*
2. *הגדר גרף דו-צדדי G עם הסוכנים של X בצד אחד והחלקים מהסעיף הקודם (מסומנים באמצעות Y) בצד השני. הוסף קשת כשמתקיים* .
3. הקצה לכל סוכן משקל זוהי פונקציה של קבוצת השכנים כך ששני סוכנים בעלי משקל זהה אם ורק אם .
4. הקצה לכל חלק משקל ייחודי כך שהמשקל של החלק השמאלי ביותר (המשויך ל-0) הוא 0 והמשקל של החלק השמאלי ביותר הבא הוא 1 וכו'.
5. הקצה לכל קשת את המחיר . בעזרת אלגוריתם 3, מצא שידוך נטול קנאות מקסימלי וזול ביותר ב-*G*.
6. הגדר להיות הקבוצה של כל הסוכנים המשויכים לכל החלקים ב-*Y.* תן לכל סוכן בקבוצה חלק שרירותי מ-.
7. הגדר . חלק את הסוכנים ב- לתתי קבוצות לפי המשקל שלהם. כלומר, עבור כלשהו, מצא חלוקה כך ש- שייכים לאותו אם ורק אם .
8. עבור כל , חלק בצורה רקורסיבית את האיחוד של החלקים ב- בקרב הסוכנים של .
9. חלק בצורה רקורסיבית את האיחוד של החלקים ב- בקרב הסוכנים של על ידי חזרה לצעד מספר 1.